ARCHIVIO DI STUDI URBANI E REGIONALI

ANNO I, NUMERO 7-8 **NOVEMBRE 1968**

L'ARCHIVIO DI STUDI URBANI E REGIONALI È PROMOSSO DA LAURA BALBO, PAOLO CECCARELLI, ADA COLLIDÀ, PIETRO L. FANO, FRANCESCO INDOVINA, BERNARDO SECCHI, GUGLIELMO ZAMBRINI. DIREZIONE E REDAZIONE, PIAZZALE BARACCA 8, 20123 MILANO, TEL. 464741. RESPONSABILE ADA BECCHI COLLIDÀ. AUTORIZZ. TRIB. DI MILANO N. 14068 DEL 16 APRILE 1968 SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE GRUPPO III - ABBONAMENTO A 10 NUMERI L. 3.000, ENTI L. 10.000, ESTERO L. 5.000 (DOLLARI 8), VERSAMENTI SUL C/C POSTALE N. 3/16861 INTESTATO A: ARCHIVIO DI STUDI URBANI E REGIONALI

CONSIDERAZIONI SUI MUTAMENTI DI UNA TECNOLOGIA LINEARE *

Ernesto Marinelli **-Gianfranco Pala **

(ricevuto nel novembre 1968)

Contributo al chiarimento teorico della natura dei mutamenti di una tecnologia lineare, delle caratteristiche interpretative che ne discendono, delle possibilità operative che ne derivano. L'applicazione viene fatta al caso particolare delle interdipendenze settoriali. Si individuano alcuni modi particolari di induzione dei consumi da parte della produzione

Il problema relativo a un mutamento delle tecniche di produzione, con particolare riguardo ai modelli lineari, è stato considerato da diversi studiosi sotto molteplici punti di vista. Tuttavia, si ha l'impressione prevalente che esso abbia ricevuto una certa attenzione per fini descrittivi di una realtà operativa immediata. È venuta a mancare, quindi, la parte di indagine relativa alla individuazione delle cause materiali stesse cui attribuire la estrinsecazione dei fenomeni reali descritti. Le considerazioni che seguono hanno come loro scopo fondamentale di contribuire a un preliminare chiarimento teorico della natura dei mutamenti di una tecnologia lineare, delle caratteristiche interpretative che ne possono derivare, delle possibilità operative degli algoritmi trovati, del significato pra-

---

* Il presente articolo è frutto di una collaborazione degli autori iniziatasi per la preparazione della tesi di laurea, in matematica applicata presso l'università di Roma, di Ernesto Marinelli di cui Gianfranco Pala è stato relatore; il presente articolo costituisce infatti un approfondimento dei risultati piú interessanti raggiunti in quella tesi. Marinelli è responsabile delle parti prevalentemente matematiche (corrispondenti a 1 e 2); Pala delle questioni prevalentemente economiche (3 e 4). Gli autori comunque si ritengono corresponsabili dell'intero articolo.

** Università di Roma.

tico sulla cui base soltanto si è formulata l'esposizione teorica. Si prenderanno dunque in considerazione, ordinatamente: le proprietà matematiche di una generica tecnologia lineare e dei suoi diversi possibili mutamenti; l'applicazione sostanziale di tali proprietà formali a alcuni modelli economici lineari di produzione di uso comune, in particolare al caso delle interdipendenze settoriali di tipo leontieviano; le conseguenze di tali mutamenti tecnologici sugli insiemi di soluzione (quantità e prezzi) dei modelli considerati (1). Come è stato già detto queste considerazioni sono affatto generali e preliminari, essendo suscettibili di ulteriori notevoli sviluppi, in seguito a un esame più approfondito. Inoltre va detto che in quesa sede non viene avanzata nessuna critica esplicita alla logica economica che presiede a una tale impostazione dello studio del processo produttivo

1. Posizione del problema

L'insieme tecnologico di produzione, sotto l'ipotesi di linearità dei vincoli relativi al processo produttivo stesso, viene come d'uso rappresentato da una generica matrice rettangolare o quadrata i cui elementi sono i cosidetti coefficienti tecnici di produzione (2). Denotiamo pertanto tale insieme tecnologico con

$$T \equiv \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & t_{ij} & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

supponendo che esso identifichi quel certo istante in cui il processo produttivo si avvale di un particolare insieme di coefficienti tecnici. Consideriamo, infatti, che il mutamento tecnologico cui ci si riferisce avvenga nel corso del tempo, il quale quindi viene direttamente indicato dallo stato della tecnica. Per questo motivo, diciamo che il mutamento tecnologico si verifica tra il tempo 0 e il tempo z, cioè tra l'insieme T_o e l'insieme T_z, i cui elementi saranno essi stessi caratterizzanti l'istante di tempo cui si riferiscono, rispettivamente (t^o_{ij}), (t^z_{ij}).

Dalla definizione di T_o e T_z è immediato scrivere la differenza tra ciascun coefficiente tecnico delle due matrici e quindi la differenza stessa delle due matrici, cioè:

$$t^o_{ij} - t^z_{ij} = d_{ij}$$

da cui

$$T_o - T_z = \sum_{ij} d_{ij}\, E_{ij} = D \qquad (1)$$

$$T_z = T_o - \sum_{ij} d_{ij}\, E_{ij} = T_o - D$$
$$(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots n)$$

dove con E_{ij} si suole indicare la matrice avente tutti gli elementi nulli tranne quello di posizione (ij), uguale a uno:

$$E_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 0\,0 \dots\dots 0 \\ 0\,0 \dots\dots 0 \\ \dots\dots 1 \dots \\ 0\,0 \dots\dots 0 \end{bmatrix}$$

e con D — quando occorra — la matrice delle differenze d_{ij}.

La differenza d_{ij} tra i coefficienti tecnici al tempo 0 e al tempo z può essere naturalmente sia positiva che negativa: ciò dipende soltanto dal fatto che l'impiego della merce i nel processo j sia diminuito o aumentato (3).

Così poste le definizioni che per il momento interessano, il problema fondamentale che si presenta consiste nel trovare una qualche particolare relazione tra T_o e T_z, la quale si presti sia a una significativa interpretazione economica sia a una potenzialità operativa concreta. Una relazione con tali proprietà si ottiene moltiplicando per una matrice quadrata opportunamene conformabile (a destra o a sinistra, rispettivamente, secondo che abbia prevalente rilevanza riferirsi ai processi-produttivi-colonne, ovvero alle merci-righe) la ma-

(1) Uno dei fenomeni, sui quali sembra interessante concentrare notevolmente l'attenzione, riguarda il collegamento funzionale dinamico tra investimenti presenti e consumi futuri come può derivare da un mutamento tecnologico a una certa data, tale da precondizionare le disponibilità di qualsivoglia merce a una data successiva.

(2) È noto che il generico coefficiente tecnico di produzione t_{ij} indica la quantità necessaria della merce i per la produzione unitaria della merce j. I coefficienti tecnici si assumono non negativi.

(3) Un miglioramento dei metodi di produzione comporterà in media un maggior peso nelle diminuzioni che negli aumenti degli impieghi. Tuttavia, può essere interessante considerare un caso di differenza negativa, interpretabile come miglioramento delle condizioni retributive dei lavoratori, in cui gli impieghi possono essere veduti come beni-salario e il processo come produttivo di lavoro. Viceversa, il caso a questo corrispondente di differenza positiva, può essere esaminato dal punto di vista della merce-lavoro, come riduzione della quantità di lavoro diretto necessario nei diversi processi produttivi.

trice della tecnica al tempo 0, in modo che essa si muti nella corrispondente matrice della tecnica al tempo z.

Denotiamo con M la matrice a destra che serve per mutare la tecnologia da T_o a T_z, e con $\mathbf{M}$ la analoga matrice a sinistra. Quindi il problema da risolvere si presenta così, alternativamente (4):

$$T_o M = T_z$$

ovvero $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (2)

$$\mathbf{M} T_o = T_z$$

Da (1) risulta che (2) divengono rispettivamente

$$T_o M = T_o - D$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (3)

$$\mathbf{M} T_o = T_o - D$$

cioè

$$T_o (I - M) = D$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (4)

$$(I - \mathbf{M})\, T_o = D$$

Da queste ultime si ricavano immediatamente i valori cercati per le matrici dei mutamenti tecnologici, M e $\mathbf{M}$, cioè (5):

$$M = I - T_o^{-1} D$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (5)

$$\mathbf{M} = I - D\, T_o^{-1}$$

Possiamo per comodità indicare con M_{ij} il generico elemento della matrice $(I - M) \equiv T_o^{-1} D$ relativo alla matrice dei mutamenti a destra, e analogamente con $\mathbf{M}_{ij}$ il generico elemento della matrice $(I - \mathbf{M}) \equiv DT_o^{-1}$ relativo alla matrice dei mutamenti a sinistra.

Nei modelli economici lineari assume sempre importanza la dualità del problema considerato, proprietà che nei sistemi di produzione si traduce nella relazione di quantità e prezzi. Se quanto abbiamo veduto fin qui può essere riferito a uno studio in termini quantitativi, il problema duale da considerare è quello in termini di costi. Per esaminare il fenomeno duale, dunque, occorre ragionare sulla trasposta della matrice tecnologica. Così facendo, ovviamene, i processi produttivi saranno rappresentati dalle colonne (6). Conseguenza di ciò è che per riguardo al costo di ciascun processo produttivo assume preminenza la moltiplicazione a sinistra, mentre per riguardo al costo totale di ciascuna merce impiegata assume preminenza la moltiplicazione a destra.

Formalmente, infatti, trasponendo (2), si ottiene

$$M' T'_o = T'_z$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (6)

$$T'_o \mathbf{M}' = T'_z$$

da cui, procedendo come in precedenza, si ha

$$M' = I - D' T'^{-1}_o = I - (M'_{ij})$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (7)

$$\mathbf{M}' = I - T'^{-1}_o D' = I - (\mathbf{M}'_{ij})$$

dove tutte le notazioni con il segno di trasposizione sono intuitive.

2. Soluzioni dei mutamenti tecnologici

Esamineremo dapprima gli aspetti formali delle diverse soluzioni che si ottengono per alcuni possibili casi. In particolare, considereremo separatamene quattro diverse ipotesi di mutamenti che si riferiscono, rispettivamente, a un solo elemento, a una sola colonna, a una sola riga, a un numero qualsiasi di elementi (generalmente tutti).

i) *Mutamento di un solo elemento* cioè di un solo coefficiente tecnico di produzione. Questo caso, secondo che ci si riferisca a tale coefficiente come elemento di una riga o come elemento di una colonna, può essere considerato come mutamento dell'impiego di una certa merce o come mutamento di un certo processo produttivo. Naturalmente, esso non consiste in effetti che nel mutamento dell'impiego di quella certa merce in quel certo processo produttivo, ma la moltiplicazione per la matrice dei mutamenti a sinistra o a destra pone in diversa evidenza l'uno o l'altro aspetto del fenomeno.

Sia t_{ij} l'unico coefficiente della matrice tecnologica che subisce un mutamento tra il tempo 0 e il tempo z (*). Dalla prima di (1) si ha che $t^o_{ij} - t^z_{ij} = d_{ij}$. Pertanto anche la matrice delle differenze si riduce a avere un solo elemento diverso da zero, quello di posto *(ij)*, in quanto interessa soltanto la matrice E_{ij} e ciò elimina l'operazione di doppia sommatoria. In conformità alle notazioni prece-

---

(4) Da (2) risulta ovvio che

$$T_o M = \mathbf{M} T_o$$

cioè

$$M = T_o^{-1} \mathbf{M} T_o$$

ovvero

$$\mathbf{M} = T_o M T_o^{-1}$$

(5) Naturalmente a questo punto si deve supporre che la tecnologia sia ridotta sempre a una matrice quadrata, diciamo di ordine m, e, affinché abbia senso la sua matrice inversa, det $T_o \neq 0$.

(6) Pertanto, nel generico coefficiente tecnico della matrice trasposta, t'_{ij}, il primo indice (i) si riferirà alle colonne e il secondo (j) alle righe.

(*) Ci scusiamo con i lettori per la lieve differenza tra i caratteri di stampa corsivi e normali relativi agli indici i, j. I caratteri corsivi *i, j* si riferiscono sempre agli elementi mutati.

denti, quindi, nel caso presente di mutamento del solo elemento t_{ij} indichiamo con D^{ij} la matrice delle differenze, con M^{ij} la matrice dei mutamenti a destra, e con $\mathbf{M}^{ij}$ la matrice dei mutamenti a sinistra [7].

Allora, (5) divengono

$$M^{ij} = I - T_o^{-1}\ D^{ij} = I - (M_{ij}{}^{ij})$$

e

$$\mathbf{M}^{ij} = I - D^{ij}\ T_o^{-1} = I - (\mathbf{M}_{ij}{}^{ij}) \qquad (8)$$

dove si noti che la matrice dei mutamenti a destra ha la sola colonna *j*, relativa al processo *j*, senza alcun elemento generalmente nullo, mentre la matrice dei mutamenti a sinistra ha la sola riga *i*, relativa alla merce *i*, senza alcun elemento generalmente nullo. Queste due matrici si presentano, infatti, nel modo seguente:

$$M^{ij} = \begin{bmatrix} 1\ 0 \ldots\ldots -M^{ij}_{1j} \ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots\ldots -M^{ij}_{2j} \ldots 0 \\ \ldots\ldots 1 - M^{ij}_{jj} \ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots\ldots -M^{ij}_{mj} \ldots 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ -\mathbf{M}^{ij}_{i1} & -\mathbf{M}^{ij}_{i2} \ldots 1 - \mathbf{M}^{ij}_{ii} \ldots -\mathbf{M}^{ij}_{im} \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

La loro interpretazione è, così, di immediata comprensione. La matrice dei mutamenti a destra, M^{ij}, opera sui processi produttivi: il mutamento della quantità di una delle diverse merci impiegate come fattori di produzione nel processo *j* comporta la necessità di operare un determinato mutamento proprio su tale processo per passare dalla tecnologia in uso al tempo 0 alla tecnologia in uso al tempo z. Viceversa, la matrice dei mutamenti a sinistra, $\mathbf{M}^{ij}$, opera sulle merci impiegate; il mutamento della quantità della merce *i*, in uno dei diversi processi produttivi in cui essa è impiegata, comporta la necessità di operare un determinato mutamento proprio sull'impiego di tale merce per passare dalla tecnologia in uso al tempo 0 alla tecnologia in uso al tempo z.

Non si dimentichi, a questo punto, che le matrici dei mutamenti (sia a destra, sia a sinistra) si ottengono in seguito alla moltiplicazione della matrice delle differenze (tra la tecnologia iniziale e quella finale) per la matrice inversa della tecnologia iniziale. Ciò consentirà, più avanti, di dare delle interessanti interpretazioni economiche di questo fenomeno, con particolare riferimento all'uso di schemi di programmazione di tipo leontieviano.

Passando al problema duale, nel caso di mutamento di un solo elemento, da (7) si ottiene la soluzione per le matrici trasposte dei mutamenti:

$$M'^{ij} = I - D'^{ij}\ T'_o{}^{-1} = I - (M'_{ij}{}^{ij})$$

e

$$\mathbf{M}'^{ij} = I - T'_o{}^{-1}\ D'^{ij} = I - (\mathbf{M}'_{ij}{}^{ij}) \qquad (9)$$

In questo caso, a differenza del problema diretto, è la matrice dei mutamenti a sinistra che spiega il mutamento del costo del processo produttivo *j* causato del diverso impiego di una delle merci considerate come fattori di produzione, in quanto il costo del processo in questione è espresso dalla riga *j*. Invece, è la matrice dei mutamenti a destra che spiega ora il mutamento del costo totale dell'impiego della merce *i* causato dal diverso impiego di tale merce in uno dei processi produttivi a cui essa partecipa, in quanto il costo totale della merce in questione è espresso dalla riga *i*. Queste matrici trasposte risultano immediatamente dalle loro matrici dirette [8].

ii) *Mutamento di una colonna*, cioè di un intero processo produttivo. Certamente anche questo caso può essere veduto in relazione con le merci impiegate anziché con il processo produttivo: cioè, si può pensare al mutamento dell'impiego di tutte le merci in un certo processo. Questa interpretazione è, tuttavia, molto meno significativa, per cui la moltiplicazione a destra per la matrice dei mutamenti assume una ben maggiore importanza che non la moltiplicazione a sinistra.

Sia t_j il vettore-colonna della matrice tecnologica che subisce un mutamento tra il tempo 0 e il

---

(7) Cioè,

$$D^{ij} = d_{ij}\ E_{ij}$$
$$M^{ij} = (I - T_o^{-1}\ d_{ij}\ E_{ij}),$$
$$\mathbf{M}^{ij} = (I - d_{ij}\ E_{ij}\ T_o^{-1}),$$

e quindi

$$M^{ij}{}_{ij} = T^{o\prime}{}_{ji}\ d_{ij},$$
$$\mathbf{M}^{ij}{}_{ij} = d_{ij}\ T^{o\prime}{}_{ji}.$$

(8) Abbiamo denotato, già in (7), con M'_{ij} il generico elemento M_{ji}, otenuto con lo scambio di righe e colonne.

tempo z. Dalla prima di (1) si ha che $t^o_j - t^z_j = d_j$. Pertanto anche la matrice delle differenze ha una sola colonna diversa da zero, la j-ma, in quanto interessano soltanto le matrici E_{ij}, cosa che elimina l'operazione di sommatoria rispetto a j. In conformità alle precedenti notazioni, nel caso presente di mutamento della colonna t_j, indichiamo con D^j la matrice delle differenze, con M^j la matrice dei mutamenti a destra e con $\mathbf{M}^j$ la matrice dei mutamenti a sinistra [9].

Questa volta, allora, (5) divengono:

$$M^j = I - T_o^{-1} D^j = I - (M_{ij}^j)$$

e

$$\mathbf{M}^j = I - D^j T_o^{-1} = I - (\mathbf{M}_{ij}^j) \tag{10}$$

dove si noti che la matrice dei mutamenti a destra ha ancora la sola colonna j, relativa al processo j, senza alcun elemento generalmente nullo, mentre la matrice dei mutamenti a sinistra presenta ora tutti gli elementi generalmente non-nulli, proprio perché la matrice inversa della tecnologia iniziale è moltiplicata a sinistra per una matrice delle differenze in cui figura un elemento diverso da zero su ogni riga. Queste due matrici si presentano nel modo seguente:

$$M^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots - M^j_{1j} & 0 \\ 0 & 1 & . \quad - M^j_{2j} & 0 \\ \dots & \dots & 1 - M^j_{ij} & \dots \\ 0 & 0 & - M^j_{mj} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^j = \begin{bmatrix} 1 - \mathbf{M}^j_{11} & - \mathbf{M}^j_{12} & \dots & - \mathbf{M}^j_{1m} \\ - \mathbf{M}^j_{21} & 1 - \mathbf{M}^j_{22} & \dots & - \mathbf{M}^j_{2m} \\ \dots\dots & \dots & - \mathbf{M}^j_{ij} & \dots \\ - \mathbf{M}^j_{m1} & - \mathbf{M}^j_{m2} & \dots & 1 - \mathbf{M}^j_{mm} \end{bmatrix}$$

Si vede ancora che il significato economico della matrice dei mutamenti a destra si riconduce, come nel caso precedente, all'operazione di un determinato mutamento sul processo considerato j, per passare dalla tecnologia al tempo 0 alla tecnologia al tempo z. Tuttavia, in questo caso, si ricordi che ognuno degli elementi significativi della matrice dei mutamenti a destra non è il semplice prodotto della differenza tra i coefficienti tecnici considerati e del corrispondente elemento della matrice inversa della tecnologia iniziale, ma è una combinazione lineare di tali prodotti (con la sommatoria variabile secondo l'indice relativo alle merci).

Diversamente, il mutamento operato attraverso la matrice dei mutamenti a sinistra, essendo relativo alle merci si ripercuote e rende significativi tutti i suoi elementi, che appunto sono i prodotti ordinati della differenza tra i coefficienti tecnici che interessano per l'elemento corrispondente della matrice inversa della tecnologia iniziale.

Quanto al problema duale, ancora da (7) si ottiene

$$M'^j = I - D'^j T'^{-1}_o = I - (M'^j_{ij})$$

e

$$\mathbf{M}'^j = I - T'^{-1}_o D'^j = I - (\mathbf{M}'^j_{ij}) \tag{11}$$

per cui, dato il significato di costo alla dualità, assume di nuovo maggior rilievo la moltiplicazione a sinistra, come mutamento da operare sul costo del processo produttivo j; mentre la moltiplicazione a destra denota la ripercussione su tutti i costi di produzione dovuta al diverso impiego di tutte le merci del processo j. Non occorre scrivere lo sviluppo delle matrici trasposte, in quanto ovvio.

iii) *Mutamento di una riga*, cioè di tutti gli impieghi di una merce. Questo caso è il simmetrico del precedente. Infatti, in riferimento alla merce assume prevalente rilievo la moltiplicazione a sinistra. Per la moltiplicazione a destra si potrebbe pensare al mutamento di tutti i processi produttivi nel solo impiego di una certa merce.

Allora sia t_i il vettore riga della matrice tecnologica che subisce un mutamento tra il tempo 0 e il tempo z. Dalla prima di (1) si ha che $t^o_i - t^z_i = d_i$. Pertanto anche la matrice delle differenze ha una sola riga diversa da zero, la i-ma, in quanto interessano soltanto le matrici E_{ij}, cosa che elimina l'operazione di sommatoria rispetto a i. In conformità alle precedenti notazioni, indichiamo con D^i la matrice delle differenze, con

---

(9) Cioè,

$$D^j = \Sigma_i \, d_{ij} \, E_{ij}$$
$$M^j = (I - T_o^{-1} \Sigma_i \, d_{ij} \, E_{ij})$$
$$\mathbf{M}^j = (I - \Sigma_i \, d_{ij} \, E_{ij} \, T_o^{-1})$$

e quindi

$$M^j_{ij} = \Sigma_h \, T^{o\prime}_{hi} \, d_{hj},$$
$$\mathbf{M}^j_{ij} = d_{ij} \, T^{o\prime}_{ji}.$$

 M^i la matrice dei mutamenti a destra e con $\mathbf{M}^i$ la matrice dei mutamenti a sinistra [10].

Questa volta (5) divengono:

$$\begin{aligned} M^i &= I - T_o^{-1}\ D^i = I - (M_{ij}{}^i) \\ &\text{e} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (12) \\ \mathbf{M}^i &= I - D^i\ T_o^{-1} = I - (\mathbf{M}_{ij}{}^i) \end{aligned}$$

dove ora è la matrice dei mutamenti a sinistra che ha la sola riga i, relativa alla merce i, senza alcun elemento generalmente nullo, mentre la matrice dei mutamenti a destra presenta tutti gli elementi generalmente non-nulli, essendo ottenuta moltiplicando a destra la matrice inversa della tecnologia iniziale per una matrice delle differenze in cui figura un elemento diverso da zero su ogni colonna. Queste due matrici sono corrispondenti a quelle del caso precedente, dove si sostituisca il riferimento i a j e si ricordi che la M^i è simile alla $\mathbf{M}^j$ e la $\mathbf{M}^i$ alla M^j, con la riga i-ma significativa al posto della colonna j-ma.

Anche l'interpretazione economica è simmetrica ove si pensi che per passare dalla tecnologia al tempo 0 alla tecnologia al tempo z, la matrice dei mutamenti a sinistra opera su tutti gli impieghi alternativi della merce i, esprimendo così i suoi elementi significativi della riga i-ma come combinazioni lineari (con sommatoria estesa rispetto ai processi produttivi) delle differenze dei coefficienti tecnici e degli elementi della matrice inversa della tecnologia iniziale. Ancora simmetricamente va veduto il mutamento su tutti i processi produttivi causato dai diversi impieghi di una certa merce, operato dalla matrice dei mutamenti a destra, i cui elementi sono semplici prodotti ordinati delle differenze dei coefficienti tecnici per gli elementi della matrice inversa della tecnologia iniziale.

Simmetrico è anche il problema duale, da (7):

$$\begin{aligned} M'^i &= I - D'^i\ T'_o{}^{-1} = I - (M'_{ij}{}^i) \\ &\text{e} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (13) \\ \mathbf{M}^i &= I - T'_o{}^{-1}\ D'^i = I - (\mathbf{M}'_{ij}{}^i) \end{aligned}$$

il significato economico in termini di costo totale della merce impiegata i (per la moltiplicazione a sinistra) ovvero di ripercussione su tutti i costi di produzione dovuta al diverso impiego della merce i in tutti i processi (per la moltiplicazione a destra), è simile al precedente. Lo sviluppo delle matrici trasposte è intuitivo.

iv) *Mutamento di tutta la matrice*, cioè dell'intera tecnologia. Questo caso, ovviamente, è il più generale e si può interpretare tanto come un mutamento di tutti i processi produttivi, con la moltiplicazione a destra, quanto come un mutamento di tutte le merci impiegate, con la moltiplicazione a sinistra.

Le notazioni sono senz'altro quelle generali date nella posizione del problema, dato che interessano tutti gli elementi, e quindi anche la sommatoria di (1) rimane estesa sia a i, sia a j [11].

Naturalmente, (5) rimangono le stesse, cioè:

$$\begin{aligned} M &= I - T_o^{-1}\ D = I - (M_{ij}) \\ &\text{e} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5) \\ \mathbf{M} &= I - DT_o^{-1} = I - (\mathbf{M}_{ij}) \end{aligned}$$

dove ormai entrambe le matrici dei mutamenti, sia a destra sia a sinistra, hanno tutti gli elementi generalmente diversi da zero, per il fatto che la matrice inversa della tecnologia iniziale è moltiplicata a destra o a sinistra, per una matrice delle differenze in cui figurano elementi diversi da zero su ogni colonna e su ogni riga. La forma della matrice dei mutamenti completi a destra è la seguente:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 - M_{11} & -M_{12} \ \ldots\ldots & -M_{1m} \\ -M_{21} & 1 - M_{22} \ \ldots\ldots & -M_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots & -M_{ij} & \ldots\ldots \\ -M_{m1} & -M_{m2} & 1 - M_{mm} \end{bmatrix}$$

mentre quella della matrice dei mutamenti a sinistra è analoga, essendo $(I - \mathbf{M}) \equiv (\mathbf{M}_{ij})$. Naturalmente è diverso il modo in cui si ottiene ciascun elemento, rispettivamente, della matrice a destra e di quella a sinistra: nel primo caso, per l'interpretazione economica, relativa al passaggio dalla tecnologia al tempo 0 alla tecnologia al tempo z, assume rilievo la ripercussione su tutti i processi produttivi esercitati, mentre nel secondo caso assume rilievo la ripercussione su tutte le merci impiegate come fattori di produzione (ovviamente, è soltanto il momento interpretativo che è diverso e non il risultato cui si perviene).

---

[10] Cioè,

$$D^i = \Sigma_j\ d_{ij}\ E_{ij}$$
$$M^i = (I - T_o^{-1}\ \Sigma_j\ d_{ij}\ E_{ij})$$
$$\mathbf{M}^i = (I - \Sigma_j\ d_{ij}\ E_{ij}\ T_o^{-1})$$

e qiundi

$$M^i{}_{ij} = T_{ii}{}^{o\prime}\ d_{ij}$$
$$\mathbf{M}^i{}_{ij} = \Sigma_k\ d_{ik}\ T_{jk}{}^{o\prime}$$

[11] Cioè,

$$D = \Sigma_{ij}\ d_{ij}\ E_{ij}$$
$$M = (I - T_o^{-1}\ \Sigma_{ij}\ d_{ij}\ E_{ij})$$
$$\mathbf{M} = (I - \Sigma_{ij}\ d_{ij}\ E_{ij}\ T_o^{-1})$$

e quindi

$$M_{ij} = \Sigma_h\ T_{hi}{}^{o\prime}\ d_{hj}$$
$$\mathbf{M}_{ij} = \Sigma_k\ d_{ik}\ T_{jk}{}^{o\prime}$$

Il problema duale è esattamente il (7):

$$\begin{aligned} & M' = I - D' \; T'_o{}^{-1} = I - (M'_{ij}) \\ e \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7) \\ & M' = I - T'_o{}^{-1} D' = I - (M'_{ij}) \end{aligned}$$

il cui significato economico è evidentemente quello di ripercussione sui costi dei processi produttivi (per la moltiplicazione a sinistra) e di ripercussione sui costi totali delle merci impiegate (per la moltiplicazione a destra). Tralasciamo ancora lo sviluppo delle matrici trasposte.

3. Interpretazione di schemi di produzione

Le diverse soluzioni ora trovate, per i possibili mutamenti tecnologici considerati, possono rivestire un particolare interesse allorché queste tecnologie e i loro mutamenti nel tempo sono applicati a schemi di produzione. Esamineremo nell'ordine, *a)* il significato dei risultati da noi precedentemente raggiunti in relazione a diversi schemi di produzione, e, *b)* l'uso dei diversi metodi econometrici correntemente seguiti per stimare i mutamenti tecnologici.

a) Un semplice modello lineare di produzione è quello in cui T, matrice della tecnologia presa in esame, serve per associare un vettore x a un altro vettore y, entrambi diversi da zero (positivi) e aventi lo stesso numero m di componenti. La relazione che si pone per i vettori che risolvono il modello, è:

$$\begin{aligned} & Ty = x \\ \text{cioè} \qquad & \qquad\qquad\qquad (14) \\ & y = T^{-1}x \end{aligned}$$

Di questo schema di produzione ha pure interesse il problema duale, ossia

$$\begin{aligned} & T'v = p \\ \text{cioè} \qquad & \qquad\qquad\qquad (15) \\ & v = T'^{-1}p \end{aligned}$$

dove la matrice trasposta dei coefficienti tecnici, T', trasforma il vettore p nel corrispondente vettore v, entrambi diversi da zero (positivi) e con m componenti.

Negli schemi di produzione del tipo di Walras, si è soliti indicare con A la matrice dei coefficienti tecnici; per ciò che concerne il solo momento produttivo si considera $x = \overline{x}$ come dato, interpretabile come vettore delle quantità di merci impiegate nella produzione, per avere y, interpretabile come vettore delle quantità di merci ottenute dalla produzione; analogamente si considera $p = \overline{p}$ come dato, vettore dei prezzi delle merci prodotte, per avere v, vettore dei prezzi delle merci impiegate. Si ha quindi da (14) e (15):

$$Ay = \overline{x} \rightarrow y = A^{-1}\overline{x}$$

$$A'v = \overline{p} \rightarrow v = A'^{-1}\overline{p}$$

Naturalmente, tutte le considerazioni svolte precedentemente sono da vedersi in funzione del loro riferimento ai possibili modelli economici di produzione, e come tali quindi esse si applicano direttamente allo studio di uno schema di produzione di tipo walrasiano per il passaggio da una matrice di coefficienti A_o a un'altra matrice A_z. Per tale motivo è inutile ripetere le proprietà trovate a proposito di un possibile mutameno nel tempo dei coefficienti tecnici. In questo schema, tuttavia, non assume un particolare significato la matrice inversa dei coefficienti tecnici, per cui non sono possibili interpretazioni applicabili invece a altri schemi. Sarà interessante, viceversa, vedere in qual modo le soluzioni dei mutamenti tecnici si riflettono sulle soluzioni economiche di quantità e prezzi.

Un altro schema al quale potrebbero applicarsi le considerazioni sui mutamenti tecnologici è quello del tipo di von Neumann. Qui non esaminiamo dettagliatamente questo caso. Basta ricordare che in questo schema si prendono in considerazione due matrici, A e B, la prima riferita alle quantità di merci impiegate nella produzione e la seconda riferita alle quantità delle stesse merci ottenute dalla produzione. Ciò significa anche che il vettore delle merci prodotte, oltre a essere moltiplicato per la matrice B anziché per la matrice unitaria, avrà tutte le sue componenti corrispondenti a quelle del vettore delle merci impiegate; per le condizioni di equilibrio, inoltre, questa corrispondenza sarà proporzionale, cioè $x = y/\alpha$. Analogamente il problema duale presenta la corrispondenza dei due vettori dei prezzi delle merci impiegate e ottenute, con la condizione di equilibrio proporzionale $v = p\beta$. Allora, (14) e (15) formalmente divengono, per i vettori risolventi:

$$(B - \alpha A)\; y = 0$$

$$(B' - \beta\; A')\; p = 0$$

dove α è un numero che indica il fattore di sviluppo della produzione, e β un numero che indica il fattore di interesse (in equilibrio $\alpha = \beta$, sotto opportune condizioni riguardanti la tecnologia).

Per applicare le considerazioni svolte in relazione ai mutamenti tecnologici tra il tempo 0 e il tempo z, occorrerebbe ovviamente prendere in esame due serie di possibili mutamenti, sia su A sia su B, e vederne tutte le conseguenze economiche sulle soluzioni [12].

Un altro schema, quello relativo al cosiddetto sistema chiuso di Leontiev, non necessita di particolare attenzione, potendo essere ricondotto a un caso particolare del precedente schema di tipo neumanniano (ponendo $B = I$). Si tratterebbe di ricercare l'autovalore massimo della matrice A, la quale sola sarebbe sottoposta a possibili mutamenti tecnologici, senza peraltro potersi avvalere significativamente sul terreno economico di tale semplificazione [13].

Arriviamo così a interpretare lo schema di produzione che più ci sembra interessante, quello del tipo aperto di Leontiev. A un esame delle relazioni di carattere generale (14) e (15), si vede che si presentano due diverse possibili interpretazioni: una apparentemente più formale ma con implicazioni economiche più immediate, l'altra apparentemente più conforme al significato degli schemi precedenti ma con qualche maggiore difficoltà di interpretazione. Le esamineremo entrambe in questo ordine.

Nel primo caso, basta porre nelle (14) e (15) $T = (I - A)$, matrice dei coefficienti tecnici relativi ai reimpieghi delle merci come fattori intermedi di produzione; $x = \bar{c}$, vettore dei consumi o più generalmente degli impieghi finali delle merci prodotte; inoltre, scrivendo p al posto di v, come vettore dei prezzi delle merci prodotte dal sistema e impiegate sia nella fase intermedia sia in quella finale, e $\bar{w}$ al posto di p come vettore dei costi in termini di un unico fattore originario di produzione (lavoro) [14], si ottiene lo schema di produzione di tipo leontieviano aperto:

$$(I - A)\, y = \bar{c} \quad \longrightarrow \quad y = (I - A)^{-1}\, \bar{c} = (A'_{ij})\, \bar{c}$$
$$\text{e} \qquad (16)$$
$$(I - A)'\, p = \bar{w} \longrightarrow \quad p = (I - A)'^{-1}\, \bar{w} = (A_{ij})\, \bar{w}$$

dove $A'_{ij} \in (A'_{ij}) \equiv (I - A)^{-1}$ è il generico coefficiente di attivazione cioè l'elemento di posto (ji) della matrice inversa dei coefficienti tecnici relativi ai reimpieghi [15].

Riprendendo in esame le soluzioni dei mutamenti si possono cominciare a vedere alcune importanti interpretazioni economiche. Innanzi tutto da (1) risulta che $d_{ij} = a^z_{ij} - a^o_{ij}$ (per ogni i, j) e quindi $D = A_z - A_o$, cioè vi è un cambiamento di segno nella differenza tra la tecnologia al tempo 0 e la tecnologia al tempo z. Questa variazione di segno va ben tenuta presente per il significato economico dell'elemento d_{ij}, che è già stato messo in luce [16]. Come si è detto, la matrice dei mutamenti (a destra o a sinistra) è formata da elementi che sono combinazioni lineari delle differenze tra i coefficienti tecnici con gli elementi della matrice inversa della tecnologia iniziale, cioè con gli elementi $T^{o\prime}_{ij} \in T_o^{-1}$, come risulta da (5). Ma nella interpretazione qui data dello schema di produzione di tipo leontieviano, essento $T_o = (I - A_o)$, gli elementi $A^{o\prime}_{ij} \in (I - A_o)^{-1}$ non sono altro che i coefficienti di attivazione relativi alla matrice iniziale dei reimpieghi. Ne risulta pertanto che gli elementi delle matrici dei mutamenti a destra e a sinistra, e delle loro trasposte, sono funzioni lineari dei coefficienti di attivazione e delle differenze tecnologiche: potremo chiamare tali elementi « coefficienti di innovazione ».

È interessante osservare come sono costituiti questi coefficienti di innovazione nella matrice dei mutamenti a destra e nella matrice dei mutamenti a sinistra. Conformemente alle interpretazioni economiche precedentemente suggerite, la matrice dei mutamenti a destra deve porre in maggior risalto il fenomeno relativo ai processi produttivi, mentre la matrice dei mutamenti a sinistra deve porre in maggior risalto il fenomeno relativo alle merci impiegate. Così si vede che, nel primo caso, il generico coefficiente di innovazione $M_{ij} = \Sigma_h A^{o\prime}_{hi}\, d_{hj}$ risulta essere funzione dei coefficienti di attivazione relativi al peso che le diverse merci hanno sulla produzione complessiva della merce in questione, i, e delle differenze tecnologiche relative alle quantità delle diverse merci impiegate nel processo in questione, j; nel secondo caso, il generico coefficiente di innovazione $M_{ij} = \Sigma_k d_{ik}\, A^{o\prime}_{jk}$ risulta essere funzione delle differenze tecnologiche relative alle quantità

[12] Non si può infatti considerare formalmente $T = (B - \alpha A)$ e $x = 0$ perché, dovendo essere $y > 0$, risulterebbe $\det T = 0$.

[13] V. nota precedente.

[14] Per completare il modello con l'inclusione della quantità di lavoro necessario e del salario, basta aggiungere un vincolo al problema diretto (chiamando x la quantità di lavoro).

$$a_{m+1}\, y = x$$

in modo che (chiamando v il salario unitario) sia

$$w \equiv a'_{m+1}\, v$$

[15] È noto che il generico coefficiente di attivazione A'_{ij} indica la produzione complessiva (diretta e indiretta) della merce j richiesta dall'impiego unitario finale della merce i. Nel caso di matrice tecnologica indecomponibile i coefficienti di attivazione sono strettamente positivi (teorema di Hawkins-Simon).

[16] Si veda nota 3.

Qui $d_{ij} = - d_{ij}$

della merce in questione, i, impiegata nei diversi processi, e dei coefficienti di attivazione relativi al peso che la merce ottenuta dal processo in questione, j, ha sulla produzione complessiva delle altre merci (17).

La lettura diretta di ciascun termine $A^{o\prime}_{hi}\, d_{hj}$, ovvero $d_{ik}\, A^{o\prime}_{jk}$, secondo che si consideri la matrice M a destra o la matrice **M** a sinistra, dice, rispettivamente, quale deve essere la variazione della produzione complessiva di i in relazione all'impiego della merce h, dovuta a un differente impiego della stessa merce h nel processo j (effetto di « trasformazione »); ovvero, quale deve essere la variazione provocata dall'impiego della merce j sulla produzione complessiva di k, dovuta a un differente impiego della merce i nello stesso processo produttivo k (effetto di « sostituzione »).

L'interpretazione ora data, di uno schema di produzione di tipo leontieviano può essere quindi di notevole interesse perché riesce a esprimere il passaggio da una tecnologia al tempo 0 a una tecnologia a un tempo successivo z mediante una semplice moltiplicazione per un'altra matrice (a destra o a sinistra), i cui elementi — che qui abbiamo appunto chiamato coefficienti di innovazione — sono funzioni dei coefficienti di attivazione. Occorre notare che i coefficienti di attivazione sono naturalmente noti mentre ovviamente sono incognite le differenze tecnologiche; perché, altrimenti, se queste differenze fossero note non sussisterebbe alcun problema per passare dalla tecnologia 0 alla tecnologia z, ma soltanto alcuni calcoli per valutare gli effetti di un simile mutamento. Un tipico problema econometrico consisterebbe, quindi, nella stima dei coefficienti di innovazione, da cui — attraverso i coefficienti di attivazione noti — si potrebbe risalire al valore da attribuire alle differenze tecnologiche. Su questo e su altri problemi di significato economico si discuterà tra breve.

Ritornando per un momento alla seconda possibile interpretazione dello schema di produzione di tipo leontieviano aperto, si vede subito in quale altro modo si possa ottenere (16) da (14) e (15). Si è detto che questa seconda interpretazione è apparentemente più immediata; di fatto, comporterà qualche maggiore difficoltà interpretativa. Allora, basta porre T = A (come già si era fatto per lo schema di tipo walrasiano) e, naturalmente, trattandosi di un sistema di transazioni intersettoriali, $x = y - \overline{c}$, vettore delle produzioni destinate ai reimpieghi, cioè al netto dei consumi e impieghi finali; inoltre, scrivendo p al posto di v come vettore dei prezzi delle merci prodotte dal sistema, e $p - \overline{w}$ come vettore dei costi di produzione relativi ai reimpieghi, cioè al netto del costo dell'unico fattore originario di produzione (lavoro) si ottiene, appunto, lo schema (16) di tipo leontieviano aperto (18).

Innanzi tutto si noti che da (1) questa volta risulta effettivamente che $d_{ij} = a^{o}_{ij} - a^{z}_{ij}$ (per ogni i, j) cioè anche $D = A_o - A_z$, ciò significa che $d_{ij} = -\, d_{ij}$, ovvero $D = -\, D$. Una volta accertata, questa differenza non nuoce all'interpretazione che si vuole dare. La maggiore difficoltà, invece, risiede nel fatto che nelle matrici dei mutamenti figura il fattore T_o^{-1}, cioè, in base alle presenti posizioni, il fattore A_o^{-1}. Ora è noto che non sono gli elementi di A_o^{-1} che possono essere interpretati come coefficienti di attivazione, ma quelli della matrice inversa $(I - A_o)^{-1}$.

Questa difficoltà interpretativa può essere superata tentando di porre in relazione A_o^{-1} con $(I - A_o)^{-1}$. Il tentativo è possibile: la relazione definitoria, tautologica, è

$$A^{-1} = \frac{I - \det(I-A)\ (I-A)^{-1}}{\det A}$$

$$A^{-1} = \varphi\,[(I-A)^{-1}],$$

essendo φ una funzione nota. Chiamiamo per comodità M_A la matrice dei mutamenti relativa a a questa seconda interpretazione dello schema di tipo leontieviano aperto. Si vede immediatamente (cosa facilmente controllabile) che gli elementi della matrice M_A differiscono dagli elementi della precedente interpretazione della matrice M per due circostanze: la prima, ovvia, che il denominatore di ogni elemento della matrice M_A è $\det A_o$, mentre quello relativo alla matrice M è $\det (I - A_o)$; la seconda, che al numeratore dell'elemento generico di posto (i, j) occorre togliere la corrispondente differenza tecnologica d_{ij} (19).

Pertanto occorre tener conto del cambiamento dell'unità di misura, da $\det A_o$ a $\det (I - A_o)$, e della presenza in ogni elemento della matrice M_A della differenza $d_{ij} / \det A_o$. Allora, si può scrivere

---

(17) A titolo di esempio in un sistema 2 × 2 si ha

$$M = \begin{bmatrix} A_{11}\, d_{11} + A_{21}\, d_{21};\ A_{11}\, d_{12} + A_{21}\, d_{22} \\ A_{12}\, d_{11} + A_{22}\, d_{21};\ A_{12}\, d_{12} + A_{22}\, d_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} d_{11}\, A_{11} + d_{12}\, A_{12};\ d_{11}\, A_{21} + d_{12}\, A_{22} \\ d_{21}\, A_{11} + d_{22}\, A_{22}\ d_{21}\, A_{11} + d_{22}\, A_{12}; \end{bmatrix}$$

(18) Si veda nota 14.

(19) In questo confronto si è naturalmente tenuto presente che $d_{ij} = -\, d_{ij}$.

 la matrice M_A in termini della matrice M e della matrice D, cioè:

$$M_A = \left[\frac{\det (I - A_o)}{\det A_o} \right]^n M + \frac{1}{(\det A_o)^n} D$$

Ponendo le **quantità note** $\det (I - A_o)^n = a$ e $1 / (\det A_o)^n = b$, tenendo presente che $D = - D$ e che, per (4), $D = (I - A_o)(I - M)$, il precedente risultato può essere scritto

$$M_A = ab\, M - b\, (I - A_o)\, (I - M) = f(M)$$

cioè la matrice dei mutamenti M relativa a questa seconda interpretazione è una semplice funzione nota della matrice dei mutamenti M relativa alla prima interpretazione data; interpretazione che pertanto, a meno della trasformazione rappresentata dalla funzione f, conserva tutta la sua validità, nei termini già detti dei coefficienti di innovazione. Tutte le interpretazioni e applicazioni relative allo schema di produzione di tipo leonteviano saranno dunque ricondotte a questo unico motivo.

b) Nella letteratura economica l'attenzione che è stata data ai mutamenti tecnologici relativi alle matrici leontieviane ha interessato soprattutto la questioni econometriche riguardanti l'aggiornamento periodico dei coefficienti di tali matrici e la valutazione degli effetti causati da tali mutamenti sulle soluzioni economiche. Quindi, un'attenzione rivolta alla pura manifestazione del fenomeno e non alla sua formazione. Viceversa, nell'analisi precedente da noi condotta si è tentata una spiegazione e una interpretazione dei fenomeni connessi con i mutamenti di una tecnologia lineare. Su questa base si pensa che sarà possibile, allora, arricchire anche l'esperienza econometrica.

I metodi di aggiornamento delle matrici leontieviane cui ci riferiamo sono quelli elaborati da Stone e da Paelinck. Diamo per noti i diversi aspetti del cosidetto metodo RAS, che sotto varie forme costituisce la base per tenere conto dei mutamenti tecnologici. Ci riferiremo quindi a quei punti che interessano in relazione al problema trattato in questa sede, e ciò sarà fatto in modo esauriente anche per coloro che non hanno familiarità con il metodo RAS.

Innanzitutto, consideriamo di dover ragionare esclusivamente sulla matrice propria dei coefficienti tecnici, cioè sulla tecnologia rappresentata in termini quantitativi e non in termini di valore; cosa che, viceversa, si è costretti a fare nella maggior parte delle applicazioni di matrici leontieviane. In tal modo non avremo più bisogno di fare alcun cenno alla modifica della matrice dei coefficienti tecnici per tener conto dell'effetto dei prezzi.

Partendo dunque da una matrice, in termini quantitativi, vediamo che il metodo RAS prende in considerazione due motivi di mutamento: il primo, relativo all'impiego di ciascuna merce come mezzo di produzione opera sulle righe; il secondo, relativo all'ottenimento di ciascuna merce come risultato di un processo di produzione, opera sulle colonne. A questo punto si può già notare una corrispondenza dell'interpretazione dei mutamenti dal punto di vista della merce impiegata, come riga, e dal punto di vista del processo produttivo, come colonna. Questo, come si è detto nelle considerazioni precedenti, conferisce un diverso significato alla moltiplicazione a sinistra o a destra della matrice della tecnologia iniziale.

In effetti, nel metodo RAS la matrice della tecnologia iniziale, A_o, viene moltiplicata sia a sinistra per una matrice R, relativa ai mutamenti dal punto di vista delle merci impiegate, sia a destra per una matrice S, relativa ai mutamenti dal punto di vista dei processi di produzione. Si ottiene pertanto la relazione che consente di passare dalla tecnologia al tempo 0 alla tecnologia al tempo z:

$$A_z = R\, A_o\, S$$

A differenza di quanto veduto nell'analisi da noi condotta, dove era la moltiplicazione a destra o a sinistra della matrice della tecnologia iniziale per la matrice dei mutamenti, che portava l'interpretazione sulla merce o sul processo, nel metodo RAS la tecnologia iniziale è moltiplicata sia a destra sia a sinistra lasciando pertanto separati i due aspetti interpretativi dell'unico problema. Per esaminare le conseguenze di ciò, occorre valutare dettagliatamente il contenuto dell'equazione RAS.

Naturalmente, come nel problema (1) - (5), la differenza tra A_o e A_z non è nota — altrimenti non si porrebbe neanche la questione. Partendo da tale incognita, siamo riusciti a esprimere il mutamento tecnologico in termini di coefficienti di innovazione, come funzioni, di coefficienti di attivazione. Nel metodo RAS, partendo dalla stessa incognita, non si tenta una spiegazione teorica del mutamento tecnologico ma soltanto una stima di R e di S per poter passare da A_o a A_z.

Dunque, occorre ricercare il significato delle due matrici R e S che descrivono il mutamento tecnologico. R e S sono due matrici diagonali dello stesso ordine, m, delle matrici A. Il fatto che siano matrici di ordine m è richiesto dalle condizioni di calcolo dell'equazione RAS. In effetti, R e S sono scritte convenzionalmente come matrici diagonali, per le esigenze di calcolo ora dette, essendo in realtà ottenute dai corrispondenti vettori r e s, indicativi, rispettivamente, del mutamento degli impieghi delle diverse merci nella produzione e del mutamento del livello di produzione dei diversi processi.

Come è ovvio, i mutamenti espressi dai vettori r e s sono complessivi, per riguardo a ciascuna merce impiegata nei vari processi e a ciascun processo impiegante le varie merci: cioè i vettori come tali, non sono in grado di distinguere il mutamento dell'impiego di ciascuna merce in un certo processo o il mutamento di ciascun processo rispetto all'impiego di una certa merce. Pertanto, la trasformazione convenzionale di tali vettori nelle corrispondenti matrici diagonali è arbitraria, nel senso che ipotizza implicitamente che i mutamenti sui coeffiicenti tecnici si producono in maniera uniforme (sia con riferimento alle merci-righe, sia con riferimento ai processi-colonne).

In realtà questo è il limite riconosciuto del metodo RAS, tanto è vero che alcuni, Paelinck a esempio, lo impiegano soltanto per quei settori in cui una distribuzione uniforme può ritenersi più attendibile, stimando con metodi diretti la tecnologia degli altri settori. Da quanto detto, risulta immediata una riflessione: che, sia pure approssimativamente, sarebbe desiderabile poter ipotizzare esplicitamente distribuzioni non-uniformi dei mutamenti sui coefficienti tecnici. È possibile che studi econometrici accurati, sulla natura dei coefficienti di innovazione da noi introdotti, riescano a contribuire alla soluzione di questo problema. Infatti, le matrici dei mutamenti di cui sono state illustrate le proprietà, essendo basate sui coefficienti di attivazione, tengono proprio conto del fenomeno di interdipendenza che lega i vari settori e le varie merci, fenomeno trascurato invece dalle matrici R e S i cui singoli errori si ripercuotono pertanto su tutta la matrice. Formalmente, infatti, le matrici M hanno generalmente non-nulli tutti gli elementi che si riferiscono al processo o alla merce di cui si considera l'aspetto innovativo nella tecnologia, mentre le matrici R e S hanno non-nulli soltanto gli elementi della diagonale principale; di qui la fonte di errore sulla distribuzione degli effetti innovativi nella tecnologia.

Proseguiamo nell'analisi comparativa dell'equazione RAS e nella ricerca del significato delle matrici R e S. Come nelle considerazioni sui mutamenti di una tecnologia lineare, qui presentate, la matrice delle differenze dei coefficienti tecnici è incognita, così pure le matrici R e S, cioè i corrispondenti vettori r e s, sono incogniti. La stima econometrica di tali vettori è condotta con un metodo iterativo, partendo dai dati noti delle vendite di ciascuna merce impiegata complessivamente in tutti i processi di produzione, vettore indicato con **r**, e degli acquisti complessivi in ciascun processo di produzione di tutte le merci impiegate nella produzione, vettore indicato con **s**. Questi vettori complessivi, **r** e **s** sono noti, rispettivamente, a partire dalla produzione globale al netto degli impieghi finali (consumi e investimenti) per avere i reimpieghi, e a partire sempre dalla produzione globale al netto del valore aggiunto per avere il valore delle merci reimpiegate.

Il metodo iterativo consiste nel modificare progressivamente la matrice della tecnologia, quadrando reciprocamente i risultati — necessariamente difformi — una volta rispetto alle vendite delle merci impiegate, una volta rispetto agli acquisti dei processi produttivi. Il procedimento si compie un numero l di volte finché raggiunge l'approssimazione desiderata; nell'iterazione per la quadratura dei risultati si fa operativamente uso delle matrici diagonali corrispondenti ai vettori noti, così:

$$(\mathbf{R}^l \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \ldots \mathbf{R}_l^{-1})\, \mathrm{A}_0 (\mathbf{S}^l \mathbf{S}_1^{-1}\ \mathbf{S}_2^{-1} \ldots \mathbf{S}_l^{-1}) \simeq \mathrm{A}_z$$

da cui si ottiene l'equazione RAS ponendo

$$\mathrm{S} \simeq \mathbf{S}^l \mathbf{S}_1^{-1}\ \mathbf{S}_2^{-1}\ \ldots \mathbf{R}_l^{-1}$$

$$\mathrm{R} \simeq \mathbf{R}^l \mathbf{R}_1^{-1}\ \mathbf{R}_2^{-1}\ \ldots \mathbf{S}_l^{-1}$$

La comparazione condotta tra il metodo RAS e le considerazioni sui mutamenti tecnologici relativi a uno schema di produzione di tipo leontieviano qui presentato ha il solo scopo di favorire un possibile miglioramento dei metodi econometrici rivolti alla stima dei coefficienti delle matrici leontieviane, laddove si riescano — partendo da un insieme di dati noti sull'economia — a stimare i coefficienti di innovazione delle matrici dei mutamenti M, anziché le matrici diagonali R e S con il metodo iterativo ora ricordato, il quale presenta notevoli limiti di applicabilità.

D'altra parte le considerazioni da noi fatte sui mutamenti tecnologici, oltre a rivestire un diretto interesse teorico nella spiegazione della natura che unisce una tecnologia al tempo 0 con una tecnologia al tempo z, non si limitano — sul piano applicativo — alla possibile stima econometrica di una matrice successiva a una matrice nota, ma possono applicarsi a una serie di prescrizioni programmatiche di cui diremo tra breve.

4. Applicazioni di carattere economico

Nell'analisi qui condotta, dopo aver brevemente esposto alcune delle principali proprietà dei mutamenti di una tecnologia lineare, ne abbiamo esaminato le conseguenze su alcuni schemi di produzione generalmente noti, in particolare su quelli di tipo leontieviano. Tuttavia gli schemi di produzione, in accordo con (14) e (15), costituiscono alcuni modelli economici lineari — eventualmente insieme a altre condizioni di equilibrio economico. Di tali modelli quindi, bisogna ora valutare le possibili applicazioni e i significati delle soluzioni di carattere economico.

Procedendo con ordine conviene iniziare considerando un semplice modello riducibile a un problema diretto e duale di programmazione lineare, la cui soluzione è del tipo (14) e (15). Riferendosi al passaggio da una tecnologia al tempo 0 a una tecnologia al tempo z, sulla base di (2) e (6), è facile confrontare le soluzioni economiche in relazione alla matrice dei mutamenti applicata allo schema di produzione. Si ha direttamente da (14) e (16):

$$y_o = T_o^{-1}\, x \quad ; \quad y_z = T_z^{-1}\, x$$

e

$$v_o = T'_o{}^{-1}\, p \quad ; \quad v_z = T_z^{-1}\, p$$

per cui, considerando (2) e (6) si giunge alla seguente relazione, usando la matrice di trasformazione a destra per il problema diretto e quella a sinistra per il duale:

$$y_o = M\, y_z \qquad y_z = M^{-1} y_o$$

e (17)

$$v_o = M' v_z \qquad v_z = M'^{-1}\, v_o$$

dove si è ipotizzata la costanza di x e p nel tempo, cioè, si è posto $x_o = x_z = x$ e $p_o = p_z = p$. Se così non fosse, ma sempre considerando x e p dati o calcolabili, le precedenti relazioni si trasformerebbero in

$$y_z = (T_o M)^{-1}\, x_z = M^{-1}\, T_o^{-1}\, x_z$$

e (18)

$$v_z = (T'_o\, M')^{-1}\, p_z = M'^{-1}\, T'_o{}^{-1}\, p_z$$

Se anziché usare la matrice di trasformazione a destra e a sinistra, rispettivamente per i problemi diretto e duale, usassimo al contrario quelle a sinistra e a destra, anche nell'ipotesi valida per (17) di costanza nel tempo di x e p, non potremmo giungere a relazioni tipo (17). Infatti, da

$$y_z = (M\, T_o)^{-1}\, x = T_o^{-1}\, M^{-1}\, x$$

e (19)

$$v_z = (M'\, T'_o)^{-1}\, p = T'_o{}^{-1}\, M'^{-1}\, p$$

non è possibile ricavare, rispettivamente, le soluzioni di $y_o = T_o^{-1}x$ e $v_o = T'_o{}^{-1}p$. Dato che y è il vettore che indica il livello cui vengono esercitati i processi produttivi e p il vettore che indica il prezzo di produzione delle merci ottenute, risulta confermata da questa applicazione la preminenza della moltiplicazione a destra nel problema diretto e della moltiplicazione a sinistra nel problema duale.

Tutte le soluzioni ora trovate relative ai modelli economici lineari e in particolare (17), trovano la loro interpretazione applicativa più valida ancora una volta nel caso dei modelli di tipo leontieviano aperto. Avendo infatti scritto $(I-A) \rightarrow T$, $\bar{c} \rightarrow x$, $p \rightarrow v$, $\bar{w} \rightarrow p$, risultano immediati i vari collegamenti tra soluzioni al tempo 0 e soluzioni al tempo z, tra consumi (al tempo 0 o al tempo z) e produzione complessiva, tra prezzi (al tempo 0 o al tempo z) e salario, sempre per il tramite di una matrice dei mutamenti, cioè dei coefficienti di innovazione, cioè ancora dei coefficienti di attivazione al tempo 0 e delle differenze tecnologiche tra il tempo 0 e il tempo z.

Le possibili applicazioni che ne conseguono, e sulle quali non ci dilungheremo in questa sede, riguardano, a esempio, la possibilità di calcolare la produzione complessiva ritenuta necessaria in una certa data successiva a quella di cui si conoscono i dati, una volta che si siano stimati i coefficienti di innovazione.

All'inizio di questo articolo si è accennato a un diverso criterio di applicazione, sui risultati ottenuti dalle soluzioni di modelli economici lineari, che potrebbe risultare di notevole interesse: vogliamo richiamarci alla connessione tra investimenti (nel senso di mutamenti di processi produttivi) intrapresi a una certa data e consumi a una data successiva. Si supponga naturalmente di avere a disposizione tutti i dati economici che servono, riferiti al tempo 0; si supponga, inoltre, che al tempo z si voglia indurre un certo insieme di consumi $\bar{c}_z$. Normalmente, nei modelli di tipo leontieviano, si pensa astrattamente a una pura e semplice imposizione obbligatoria e programmata di questi consumi, oppure, per una maggiore concretezza apparente, si pensa di escludere il caso limite di consumi coatti e si parla di previsione della composizione della domanda finale.. Qui suggeriamo un'altra interpretazione che ci sembra molto più reale nei sistemi economici di tipo capitalistico guidati dall'attività produttiva, nei quali cioè la cosidetta sovranità del consumo — che necessiterebbe di un sistema di valori d'uso — è sostituita dalla sovranità della produzione che induce il consumo — in un sistema fondato sulla creazione di valori di scambio. Consideriamo, allora, il vettore $\overline{c}_z$ noto, come se i consumi fossero fissati coattivamente. Tuttavia non ci limitiamo a calcolare, sulla base di dati riferiti al tempo z, quale debba essere conseguentemente la produzione complessiva. Proprio per il fenomeno di induzione dei consumi da parte della produzione, pensiamo che si possa individuare un metodo più raffinato, che non la brutale imposizione, per pervenire agli stessi risultati voluti da parte dei gestori della produzione

L'analisi da compiere si trova nelle relazioni (17) - (19): fissato il vettore $\overline{c}_z$, nota la matrice $(I - A_o)^{-1}$, occorre verificare quali mutamenti tecnologici è necessario introdurre per ottenere la produzione complessiva y_z che garantisca quei consumi $\overline{c}_z$, senza che si ipotizzi alcuna alterazione del sistema delle preferenze dei consumatori. Si osservi bene che è quest'ultima l'ipotesi fondamentale che riesce a far attribuire al mutamento dei processi di produzione la causa principale dell'imposizione nascosta di certi consumi prestabiliti [20]. Infatti individuati i mutamenti tecnologici necessari, supponendo fissato $\overline{w}_z$, si trovano i nuovi pezzi duali p_z di equilibrio, che devono cioè soddisfare, in base alle funzioni di domanda dei consumatori, il consumo che si vuole imporre e la produzione che lo sostiene. (Alternativamente si può pensare di fissare quei prezzi che a partire dalle funzioni di domanda facciano assorbire il consumo imposto e di verificare quali mutamenti tecnologici si rendano necessari affinché la produzione complessiva che ne risulta, da un lato sia duale dei prezzi dati, dall'altro garantisca il consumo prestabilito).

Dalla più elementare analisi microeconomica del consumo, circa l'influenza della domanda su prezzi e quantità di equilibrio, è noto che il tasso di sostituzione di due merci deve essere uguale al rapporto dei loro prezzi, in posizione di equilibrio — e ciò vale anche nel caso di tecnologia lineare dove basta scrivere le relazioni nel discreto anziché nel continuo. Allora, considerate due merci i, j, deve essere

$$-\frac{dy_j}{dy_i} = \frac{p_i}{p_j}$$

In altre parole, il punto che qui si sostiene e che tende a eliminare ogni ipocrisia sulla pretesa autonomia del consumo, è il seguente: coloro che gestiscono il sistema produttivo desiderano che il sistema economico esprima un certo insieme di consumi a una certa data; se i consumi espressi alla data iniziale non corrispondono a quelli futuri desiderati dai produttori, essi fanno sì che venga alterato il tasso di sostituzione tra le merci; questa alterazione può essere ottenuta a parità di preferenze, cioè muovendosi su una varietà di indifferenza assegnata; in queste condizioni, l'alterazione richiesta si ottiene facilmente variando i prezzi relativi di cui è nota la relazione con il tasso di sostituzione; la variazione richiesta dei prezzi relativi è ottenuta dai produttori mediante una modificazione dei livelli dei processi produttivi considerati; la modificazione dei livelli di produzione è resa conveniente da mutamenti tecnologici che rendano compatibili i prezzi di produzione con i nuovi prezzi relativi richiesti; così i mutamenti tecnologici introdotti dai produttori li garantiscono sull'adempimento dell' obbligo di consumare, celato e indotto, che essi hanno imposto in tal modo al sistema.

Una considerazione importante concerne la capacità del sistema produttivo a introdurre i mutamenti tecnologici richiesti: ovviamente, se il sistema non avesse tale capacità occorrerebbe rivedere l'insieme dei consumi e ricondurlo a un punto tecnologicamente accessibile. Nel caso particolare del modello di tipo leontieviano, di cui stiamo discorrendo, questa capacità è ricondotta all'unico fattore originario, cioè al lavoro; tutte le altre merci, impiegate come fattori di produzione, sono a loro volta ottenute dal processo stesso di produzione. In questo senso dunque, si deve interpretare il ruolo dinamico dei mutamenti tecnologici. Cioè l'effetto di un investimento presente su un consumo futuro, in quanto la decisione di indurre un certo tipo di consumi a una certa data successiva non viene fatta irrazionalmente prendendo la decisione di produrre quella particolare merce-bene-di-consumo a quella data successiva, ma viene mascherata dalla decisione, certamente meno appariscente, di produrre alla data iniziale quelle particolari merci-beni-di-investimento che saranno in grado di apportare i mutamenti necessari ai coefficienti tecnici di produzione.

In uno studio di un sistema reale di produzione, sia pure basato su un modello di tipo leontieviano,

[20] Nella misura in cui si riuscisse a alterare il sistema delle preferenze dei consumatori, l'induzione dei consumi diverrebbe un fenomeno diretto da non mediare necessariamente con alcun mutamento tecnologico.

per verificare quali mutamenti saranno opportuni per pervenire a una nuova tecnologia, si dovranno tenere presenti un insieme di dati economici collaterali, che costituiranno le condizioni per la migliore individuazione della matrice dei mutamenti. Tra tali dati risultano essere di primaria importanza quelli relativi al tempo di produzione e messa in opera delle merci-beni-di-investimento; alla possibile non-linearità dei processi produttivi allorché si verifichino forti variazioni nei livelli cui essi vengono esercitati (21), alla fissazione esogena del salario, $\overline{w}$, veduto come fonte della domanda effettiva delle merci-beni-di-consumo, per cui si può rendere necessaria una variazione del tasso di salario da parte dei produttori, tale che li garantisca nella collocazione della loro produzione.

In questo articolo non cercheremo di analizzare più a fondo tutte le condizioni analitiche necessarie per sostenere il discorso accennato, quindi non proveremo neanche a dare una impostazione rigorosamente formalizzata al ragionamento fatto e a condurre una ricerca sull'esistenza di soluzioni uniche per un simile modello. Di questi problemi sarà interessante occuparsi in una sede diversa e apposita, che tenga conto di tutti gli auspicabili sviluppi di questo ragionamento.

Terminiamo, comunque, formulando analiticamente il problema derivante dalle applicazioni economiche ora intraviste, in modo da presentare un insieme di questioni aperte, da risolvere e dimostrare. Ciò che interessa soprattutto è la discussione sulle condizioni che si rendono necessarie per individuare quella matrice dei mutamenti che dia senso alle soluzioni intertemporali di un modello economico lineare.

Riprendendo in considerazione il modello di tipo leontieviano aperto, possiamo scrivere le diverse relazioni sulle quali dovrà essere condotto un futuro studio dettagliato. Tali relazioni si ottengono da (18), dalla similitudine tra M e **M**, dalle preferenze dei consumatori come collegamento tra prezzi e quantità di merci consumate e dalla equazione di equilibrio generale tra ammontare complessivo dei salari e valore delle merci scambiate, così:

$$\begin{aligned} y_z &= M^{-1}\,(I-A_o)^{-1}\,\overline{c}_z \\ p_z &= \mathbf{M}'^{-1}\,(I-A_o)^{-1}\,\overline{w}_z \\ \mathbf{M} &= (I-A_o)\,M\,(I-A_o)^{-1} \qquad (20) \\ p_z &= p(\overline{c}_z) \leftarrow c_z = c(p_z) \\ \overline{w}'_z\,\sigma &= p'_z\,\overline{c}_z \end{aligned}$$

dove σ è il vettore-colonna composto di tutti uno, detto vettore-somma.

Ora, a un primo esame del problema, si vede subito che ove si conoscessero, da un lato, y_z e c_z (ovvero y_z e y_o, il che secondo (17) è formalmente la stessa cosa) e, dall'altro, p_z e w_z (ovvero p_z e p_o, il che secondo (17) è formalmente la stessa cosa), l'individuazione della matrice dei mutamenti sarebbe indeterminata. Infatti, dalla prima equazione di (20) risulta che si presenterebbero $m(m-1)$ gradi di libertà per la individuazione di M; altrettanti gradi di libertà si presenterebbero per le individuazioni di **M** dalla seconda equazione di (20). Si dovrebbero imporre altre $m(m-1)$ condizioni di carattere economico su entrambi i sistemi di equazioni considerati. Ma queste $2m(m-1)$ condizioni aggiuntive sono tra loro indipendenti? Ovviamente, no. In primo luogo, infatti, vi è la relazione di similitudine e dualità tra M e **M**, per cui una loro determinazione indipendente potrebbe condurre a risultati incompatibili. In secondo luogo, vi è la determinazione di p_z da $\overline{c}_z$ dato, attraverso la funzione nota p. Nello stesso tempo devono essere rispettate queste altre due condizioni: la prima che p_z così determinato sa anche duale di y_z determinato a partire dallo stesso $\overline{c}_z$, attraverso $(I-A_z)$ come funzione di M; la seconda, che p_z così posto in relazione con $\overline{w}_z$, attraverso $(I-A_z)$ come funzione di **M**, deve anche essere tale da rispettare l'ultima equazione di (20), da un punto di vista economico di domanda globale effettiva.

Dunque, la questione aperta consiste nella ricerca della determinatezza o del grado di indeterminatezza del problema (20); eventualmente, quindi, può consistere nella ricerca di quelle condizioni che completino e rendano economicamente determinato tale problema.

Ritornando infine a una interpretazione più usuale del problema qui formulato, dal punto di vista di uno schema di produzione (22), si può riprendere il confronto con il metodo RAS. Analogamente all'operazione che si compie in quel metodo, occorre trasformare in matrici diagonali i vettori che figurano nelle due prime relazioni di (20); cioè tenendo presente anche le forme semplificate di (17), scrivendo Y_z al posto di y_z, C al

---

(21) È chiaro che in un modello non lineare la variazione dei prezzi relativi, tale da indurre una diversa domanda, può essere ricondotta a una variazione della scala di produzione mentre nel presente caso di rendimenti costanti si deve necessariamente pensare a un mutamento dei processi di produzione.

(22) Cioè, non ricercando piú la interdipendenza dinamica ta investimenti e consumi e quindi le applicazioni sulle soluzioni economiche del modello, ma il semplice aggiornamento della matrice tecnologica inizialmente nota.

posto di c, P_z al posto di p_z, W al posto di $\overline{w}$, Y_o al posto di y_o e P_o al posto di p_o, abbiamo:

$$Y_z = M^{-1} (I-A_o)^{-1} \overline{C} = M^{-1} Y_o$$

$$P_z = \mathbf{M}'^{-1} (I-A_o)'^{-1} \overline{W} = \mathbf{M}'^{-1} P_o$$

cioè (21)

$$M = Y_o Y_z^{-1}$$

$$\mathbf{M} = P_o P_z^{-1}$$

essendo sempre

$$M = (I - A_o) \mathbf{M} (I - A_o)^{-1}$$

I risultati ottenuti, in definitiva, rendono determinate, se pure in modo diverso, sia M sia **M** come matrici diagonali, il cui generico elemento è, rispettivamente, y_i^o/y_i^z e p_i^o/p_i^z. Come per il metodo RAS, anche qui occorre rendere compatibili i diversi risultati ottenuti per M e **M**, data la relazione che qui lega M a **M**, ricorrendo a un qualche metodo iterativo di quadratura che operi una volta sul rapporto tra le quantità e una volta sul rapporto tra i prezzi.

Va notato, tuttavia, che a differenza del metodo RAS, in cui i coefficienti tecnici sono definiti in valore — e in cui quindi l'aggiornamento della matrice, dovuto alle variazioni dei prezzi dal tempo 0 al tempo z, è tenuto affatto separato dall'aggiornamento dovuto alle variazioni relative a processi produttivi e merci impiegate, senza considerare quindi la dualità di prezzi e quantità — nei risultati qui delineati, la quadratura delle matrici diagonali opera iterativamente su prezzi e quantità proprio in base alla loro relazione duale.

Quest'ultimo ragionamento a titolo di confronto è stato fatto semplicemente per riproporre un metodo di analisi più assimilabile ai metodi econometrici in uso, quali il metodo RAS: *tuttavia*, rimane sempre l'arbitrarietà della trasformazione di vettori in matrici diagonali, cioè dell'ipotesi di distribuzione uniforme degli effetti innovatrici. Nel confronto qui proposto, allora, si può vedere una possibilità di superamento di tale limitazione, introducendo esogenamente distribuzioni non-uniformi su prezzi e quantità. Rimane comunque il fatto che, anche dal punto di vista econometrico, il modo migliore di risolvere il problema (21) consiste nell'analisi accurata del problema (20) e nel suo completamento a fini di una corretta interpretazione economica.